УДК 519.718

С. М. Грабовская

СИНТЕЗ НАДЕЖНЫХ НЕВЕТВЯЩИХСЯ ПРОГРАММ С УСЛОВНОЙ ОСТАНОВКОЙ В ПОЛНОМ КОНЕЧНОМ БАЗИСЕ, СОДЕРЖАЩЕМ $x_1 \& x_2$

Аннотация. Рассматривается реализация булевых функций неветвящимися программами с условной остановкой в полном конечном базисе B, содержащем конъюнкцию $x_1 \& x_2$. Предполагается, что функциональные операторы с вероятностью ε подвержены инверсным неисправностям на выходах. Решается задача синтеза надежных неветвящихся программ в двух случаях: 1) оператор условной остановки абсолютно надежен; 2) оператор условной остановки ненадежен.

Ключевые слова: булевы функции, неветвящиеся программы, оператор условной остановки, синтез, надежность.

Abstract. The problem of synthesis of nobranching programs with conditional stop-operator is considered in full finite basis, contained $x_1 \& x_2$. All functional operators are supposed to be prone output inverse failures. This problem is solved for two cases: 1) conditional stop-operator is absolutely reliable; 2) conditional stop-operator is unreliable.

Keywords: boolean functions, nobraching programs, conditional stop-operator, synthesis, reliability.

Рассматривается реализация булевых функций неветвящимися программами с условной остановкой [1] в базисе B, содержащем конъюнкцию $x_1 \& x_2$. Программы с условной остановкой характеризуются наличием управляющей команды – команды условной остановки, дающей возможность досрочного прекращения работы при выполнении определенного условия. Введем необходимые понятия и определения.

Пусть $X = \{x_1, ..., x_n\}$ – множество независимых булевых переменных, $\tilde{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ – набор независимых переменных. Введем множества переменных $Y = \{y_1, ..., y_l\}$ и $Z = \{z_1, ..., z_m\}$. Переменные из множества Y назовем внутренними, переменные из множества Z – выходными переменными. Пусть далее $a \in Y \bigcup Z, b_1, \ldots, b_d \in X \bigcup Y \bigcup Z \ (d \in \{1, 2, \ldots, n\})$, h – булева функция из базиса B, зависящая не более чем от d переменных. *Вычислительной командой p* назовем выражение $p : a = h(b_1, \ldots, b_d)$. Переменную a назовем *выходом* вычислительной команды, переменные $b_1, ..., b_d$ – *входами* этой команды.

Пусть теперь $a \in X \bigcup Y \bigcup Z$. *Командой остановки p* назовем выражение $p : \mathrm{Stop}(a)$. Переменную a назовем входом команды остановки p.

Последовательность $\mathrm{Pr} = p_1 \ldots p_i \ldots p_l$, состоящая из вычислительных команд и команд остановки, называется *неветвящейся программой с условной остановкой*, если при любом $j \in \{1, 2, \ldots, L\}$ каждый вход команды p_j есть либо независимая переменная, либо выход некоторой вычислительной команды p_i, где $i < j$.

Неветвящаяся программа работает в дискретные моменты времени $t = 0, 1, 2, \ldots$, не изменяет значения независимых переменных и изменяет значения внутренних и выходных переменных. Значения $y_i(\tilde{x}; t)$ внутренних переменных y_i и значения $z_j(\tilde{x}; t)$ выходных переменных z_j программы Pr в произвольный момент времени t на наборе независимых переменных $\tilde{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ определим индуктивно следующим образом:

– в начальный момент времени $t = 0$ значения всех внутренних и выходных переменных считаем неопределенными;

– если команда p_t не изменяет значения внутренней переменной y_i (или выходной переменной z_j), то положим

$$y_i(\tilde{x}; t) = y_i(\tilde{x}; t-1),\ z_j(\tilde{x}; t) = z_j(\tilde{x}; t-1);$$

– если команда p_t изменяет значения внутренней переменной y_i (или выходной переменной z_j), и значения $(1, \ldots, d)$-го входов команды p_t в момент времени $(t-1)$ равны соответственно $b_1(\tilde{x}; t-1), \ldots, b_d(\tilde{x}; t-1)$, то положим

$$y_i(\tilde{x}; t) = h_t(b_1(\tilde{x}; t-1), \ldots, b_d(\tilde{x}; t-1)),$$

$$z_j(\tilde{x}; t) = h_t(b_1(\tilde{x}; t-1), \ldots, b_d(\tilde{x}; t-1)).$$

Значением команды p_t программы Pr на наборе независимых переменных $\tilde{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ назовем значение ее выхода в момент времени t и обозначим $p_t(\tilde{x})$.

Через $k(p)$ обозначим номер команды p в программе Pr, т.е. $k\left(p_i\right) = i$. Пусть $p_{t_1}, \ldots, p_{t_r}$ – все команды остановки из Pr, причем $t_1 < \ldots < t_r$. Тогда через s_j будем обозначать j-ю команду остановки программы Pr, т.е. $s_j \equiv p_{t_j}$.

Вычислительную команду p_i (переменную x_l) назовем аргументом команды остановки s_j, $k(s_j) = r$, и обозначим через q_j, если:

(i) выход команды p_i (переменная x_l) является входом команды s_j;

(ii) среди команд $p_t, i < t < r$ нет команды, выход которой совпадает с выходом команды p_i.

Будем говорить, что k-я команда остановки s_k прекращает вычисления программы Pr на наборе $\tilde{x}$, если

$$q_1(\tilde{x}) = \ldots = q_{k-1}(\tilde{x}) = 0,\ q_k(\tilde{x}) = 1.$$

Результат действия программы Pr на наборе $\tilde{x}$ обозначим через $\mathrm{Pr}(\tilde{x})$, и его l-ю компоненту $\mathrm{Pr}_l(\tilde{x})$ определим следующим образом:

$$\mathrm{Pr}_l(\tilde{x}) = \begin{cases} z_l(\tilde{x}; t_k), \text{ если } q_1(\tilde{x}) = \ldots = q_{k-1}(\tilde{x}) = 0,\ q_k(\tilde{x}) = 1, \\ z_l(\tilde{x}; L), \text{ если } q_1(\tilde{x}) = \ldots = q_r(\tilde{x}) = 0. \end{cases}$$

т.е. $\mathrm{Pr}_l(\tilde{x})$ равно значению выходной переменной в момент остановки программы.

Ясно, что

$$\mathrm{Pr}_l(\tilde{x}) = q_1(\tilde{x})z_l(\tilde{x};t_1) \vee \overline{q}_1(\tilde{x})q_2(\tilde{x})z_l(\tilde{x};t_2) \vee \ldots$$

$$\ldots \vee \overline{q}_1(\tilde{x})\overline{q}_2(\tilde{x})\cdots\overline{q}_{k-1}(\tilde{x})q_k(\tilde{x})z_l(\tilde{x};t_k) \vee \ldots$$

$$\ldots \vee \overline{q}_1(\tilde{x})\overline{q}_2(\tilde{x})\cdots\overline{q}_{r-1}(\tilde{x})q_r(\tilde{x})z_l(\tilde{x};t_r) \vee \ldots$$

$$\ldots \vee \overline{q}_1(\tilde{x})\overline{q}_2(\tilde{x})\cdots\overline{q}_r(\tilde{x})z_l(\tilde{x};L). \tag{1}$$

Иногда формулу (1) удобнее использовать в преобразованном виде:

$$\mathrm{Pr}_l(\tilde{x}) = q_1(\tilde{x})z_l(\tilde{x};t_1) \vee \overline{q}_1(\tilde{x})(q_2(\tilde{x})z_l(\tilde{x};t_2) \vee \overline{q}_2(\tilde{x})(\ldots(q_{k-1}(\tilde{x})z_l(\tilde{x};t_{k-1}) \vee$$

$$\vee\overline{q}_{k-1}(\tilde{x})(\ldots \vee \overline{q}_{r-1}(\tilde{x})(q_r(\tilde{x})z_l(\tilde{x};t_r) \vee \overline{q}_r(\tilde{x})z_l(\tilde{x};L))\ldots))\ldots)). \tag{2}$$

Будем говорить, что программа Pr вычисляет n-местную булеву функцию f, если $\mathrm{Pr}(\tilde{x}) = f(\tilde{x})$ для любого $\tilde{x} \in \{0,1\}^n$.

1. Неветвящиеся программы с абсолютно надежным оператором условной остановки

Будем предполагать, что оператор условной остановки абсолютно надежен, а все вычислительные операторы базиса B независимо друг от друга с вероятностью ε $(\varepsilon \in (0,1/2))$ подвержены инверсным неисправностям на выходах. Поскольку оператор условной остановки абсолютно надежен, он срабатывает, когда на его вход поступает единица. Инверсные неисправности на выходах вычислительных операторов характеризуются тем, что в исправном состоянии вычислительный оператор реализует приписанную ему булеву функцию φ, а в неисправном – функцию $\overline{\varphi}$.

Программа Pr реализует булеву функцию $f(x_1,\ldots,x_n)$, если она реализует ее при отсутствии неисправностей.

Ненадежностью $N(\mathrm{Pr})$ программы Pr назовем максимальную вероятность ошибки на выходе программы Pr при всевозможных входных наборах.

Обозначим $N_\varepsilon(f) = \inf N(\mathrm{Pr})$, где инфимум берется по всем программам Pr из ненадежных операторов, реализующим булеву функцию $f(\tilde{x})$.

Чтобы сравнить полученные в этой работе результаты с известными результатами для схем из функциональных элементов, введем понятия *ненадежности схемы* и *асимптотически оптимальной схемы*.

Ненадежностью $N(S)$ схемы S из функциональных элементов (ФЭ), подверженных инверсным неисправностям на выходах, назовем максимальную вероятность ошибки на выходе схемы S при всевозможных входных наборах. Обозначим $N_\varepsilon(f) = \inf N(S)$, где инфимум берется по всем схемам S из ненадежных элементов, реализующим булеву функцию $f(\tilde{x})$.

Схема A из ненадежных элементов, реализующая функцию f, называется асимптотически оптимальной по надежности, если $N(A) \sim N_\varepsilon(f)$ при $\varepsilon \to 0$, т.е.

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{N_\varepsilon(f)}{N(A)}=1.$$

Сформулируем известные результаты для схем из ФЭ.

Теорема 1 [2]. *В произвольном полном конечном базисе при* $\varepsilon\in(0,1/960]$ *любую булеву функцию f можно реализовать схемой S с ненадежностью* $P(S)\le 5\varepsilon+182\varepsilon^2$.

Константа 5 в оценке ненадежности из теоремы 1 в общем случае не может быть понижена [3].

Обозначим $K(n)$ – множество булевых функций $f(x_1,x_2,\dots,x_n)$, не представимых в виде $(x_i^a \,\&\, g(\tilde{x}))^b$ $(i=1,2,\dots,n,\ a,b\in\{0,1\})$, где $g(\tilde{x})$ – произвольная функция.

Теорема 2 [3]. *Пусть* $\varepsilon\in(0,1/240]$, *функция* $f(\tilde{x})\in K(n)$, *и S – любая схема в базисе* $\{x_1\,\&\,x_2,\overline{x_1}\}$, *реализующая функцию f. Тогда* $P(S)\ge 5\varepsilon(1-\varepsilon)^4$.

Из теорем 1 и 2 следует, что в базисе $\{x_1\,\&\,x_2,\overline{x_1}\}$ при $\varepsilon\in(0,1/960]$ любая схема из ФЭ, реализующая функцию $f(\tilde{x})\in K(n)$, является асимптотически оптимальной по надежности и функционирует с ненадежностью, асимптотически равной 5ε при $\varepsilon\to 0$.

Теорема 3 [4]. *При* $\varepsilon\in(0,1/128]$ *любую булеву функцию можно реализовать такой схемой S, что* $P(S)\le 3\varepsilon+32\varepsilon^2$.

Теорема 4 [4]. *Пусть* $\varepsilon\in(0,1/6]$, *функция* $f(\tilde{x})\in K(n)$, *и S – любая схема в базисе* $\{x_1\,\&\,x_2, x_1\vee x_2,\overline{x_1}\}$, *реализующая функцию f. Тогда* $P(S)\ge 3\varepsilon-6\varepsilon^2+4\varepsilon^3$.

Из теорем 3 и 4 следует, что в базисе $\{x_1\,\&\,x_2, x_1\vee x_2,\overline{x_1}\}$ любая схема из ФЭ, реализующая функцию $f(\tilde{x})\in K(n)$, является асимптотически оптимальной по надежности и функционирует с ненадежностью, асимптотически равной 3ε при $\varepsilon\to 0$.

Для неветвящихся программ с абсолютно надежным оператором условной остановки справедливы следующие утверждения.

Лемма 1. *В базисе B при* $\varepsilon\in(0,\ 1/2)$ *программа* Pr_φ (рис. 1) *реализует функцию* $\varphi(x_1,x_2,x_3,x_4)=x_1x_2\vee x_3x_4$ *с ненадежностью* $N(\mathrm{Pr}_\varphi)\le 2\varepsilon$, *а вероятности появления нуля и единицы* $P_0(\mathrm{Pr}_\varphi,\tilde{b})$ *и* $P_1(\mathrm{Pr}_\varphi,\tilde{b})$ *на выходе программы, где* $\tilde{b}=(b_1,b_2,b_3,b_4)$, *приведены в табл. 1.*

Pr_φ :

1) $z=x_1\,\&\,x_2$

2) $stop(z)$

3) $z=x_3\,\&\,x_4$

Рис. 1

Таблица 1

Наборы $\tilde{b}$	P_0^{I}	P_0^{II}	$P_0(\mathrm{Pr}_\varphi, \tilde{b})$	P_1^{I}	P_1^{II}	$P_1(\mathrm{Pr}_\varphi, \tilde{b})$
(1, 1, 1, 1)	0	ε^2	ε^2	$1-\varepsilon$	$\varepsilon(1-\varepsilon)$	$1-\varepsilon^2$
(0, 1, 1, 1) (1, 0, 1, 1) (0, 0, 1, 1)	0	$(1-\varepsilon)\varepsilon$	$\varepsilon-\varepsilon^2$	ε	$(1-\varepsilon)^2$	$1-\varepsilon+\varepsilon^2$
(1, 1, 0, 1) (1, 1, 1, 0) (1, 1, 0, 0)	0	$\varepsilon(1-\varepsilon)$	$\varepsilon-\varepsilon^2$	$1-\varepsilon$	ε^2	$1-\varepsilon+\varepsilon^2$
(0, 1, 0, 1) (0, 1, 1, 0) (1, 0, 0, 1) (1, 0, 1, 0) (0, 0, 0, 1) (0, 0, 1, 0) (1, 0, 0, 0) (0, 1, 0, 0) (0, 0, 0, 0)	0	$(1-\varepsilon)^2$	$(1-\varepsilon)^2$	ε	$(1-\varepsilon)\varepsilon$	$2\varepsilon-\varepsilon^2$

Доказательство. Программа Pr_φ имеет один выход. Однако в ней можно выделить две подпрограммы $\mathrm{Pr}_\varphi^{\mathrm{I}}$ и $\mathrm{Pr}_\varphi^{\mathrm{II}}$. Если стоп-оператор срабатывает, то выполнение программы прекращается и на выход программы идет значение, вычисленное до остановки. В этой ситуации результат работы программы совпадает с результатом работы первой подпрограммы $\mathrm{Pr}_\varphi^{\mathrm{I}}$. Если же оператор условной остановки не срабатывает, выполнение программы продолжается, и на выход пойдет значение, вычисленное после оператора остановки. В этом случае результат работы программы совпадает с результатом работы второй подпрограммы $\mathrm{Pr}_\varphi^{\mathrm{II}}$. Вычисляя вероятность ошибки в программе Pr_φ на том или ином наборе, по формуле полной вероятности необходимо суммировать вероятности ошибок первой и второй подпрограмм.

Вычислим и оценим вероятности P_0^{I}, P_1^{I}, P_0^{II}, P_1^{II} появления нуля и единицы на выходах подпрограмм программы Pr_φ при всех входных наборах $\tilde{b}$.

Пусть входной набор $\tilde{b}$ равен (1, 1, 1, 1), тогда

$$P_0^{\mathrm{I}} = 0;$$
$$P_0^{\mathrm{II}} = \varepsilon \cdot \varepsilon;$$
$$P_1^{\mathrm{I}} = 1-\varepsilon;$$
$$P_1^{\mathrm{II}} = \varepsilon \cdot (1-\varepsilon).$$

Следовательно, $P_0(\mathrm{Pr}_\varphi, \tilde{b}) = \varepsilon^2$, $P_1(\mathrm{Pr}_\varphi, \tilde{b}) = \varepsilon^2$.

Пусть входной набор $\tilde{b}$ равен одному из наборов (0, 1, 1, 1), (1, 0, 1, 1) или (0, 0, 1, 1), тогда

$$P_0^{\mathrm{I}} = 0;$$
$$P_0^{\mathrm{II}} = (1-\varepsilon)\cdot\varepsilon = \varepsilon - \varepsilon^2;$$
$$P_1^{\mathrm{I}} = \varepsilon;$$
$$P_1^{\mathrm{II}} = (1-\varepsilon)^2.$$

Следовательно, $P_0(\mathrm{Pr}_\varphi, \tilde{b}) = \varepsilon - \varepsilon^2$, $P_1(\mathrm{Pr}_\varphi, \tilde{b}) = 1 - \varepsilon + \varepsilon^2$.

Пусть входной набор $\tilde{b}$ равен одному из наборов (1, 1, 0, 1), (1, 1, 1, 0) или (1, 1, 0, 0), тогда

$$P_0^{\mathrm{I}} = 0;$$
$$P_0^{\mathrm{II}} = \varepsilon\cdot(1-\varepsilon) = \varepsilon - \varepsilon^2;$$
$$P_1^{\mathrm{I}} = 1-\varepsilon;$$
$$P_1^{\mathrm{II}} = \varepsilon\cdot\varepsilon = \varepsilon^2.$$

Следовательно, $P_0(\mathrm{Pr}_\varphi, \tilde{b}) = \varepsilon - \varepsilon^2$, $P_1(\mathrm{Pr}_\varphi, \tilde{b}) = 1 - \varepsilon + \varepsilon^2$.

Легко проверить, что на рассмотренных наборах ошибкой будет появление 0 на выходе программы. Максимальная вероятность ошибки удовлетворяет неравенству $P_0(\mathrm{Pr}_\varphi, \tilde{b}) \le \varepsilon$.

Пусть входной набор $\tilde{b}$ равен одному из наборов (0, 1, 0, 1), (0, 1, 1, 0), (1, 0, 0, 1), (1, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1), (0, 0, 1, 0), (1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0) или (0, 0, 0, 0), тогда

$$P_1^{\mathrm{I}} = \varepsilon;$$
$$P_1^{\mathrm{II}} = (1-\varepsilon)\cdot\varepsilon = \varepsilon - \varepsilon^2;$$
$$P_0^{\mathrm{I}} = 0;$$
$$P_0^{\mathrm{II}} = (1-\varepsilon)^2.$$

Следовательно, $P_1(\mathrm{Pr}_\varphi, \tilde{b}) = 2\varepsilon - \varepsilon^2$, $P_0(\mathrm{Pr}_\varphi, \tilde{b}) = (1-\varepsilon)^2$.

Заметим, что на рассмотренных наборах ошибкой будет появление 1 на выходе программы. Вероятность ошибки удовлетворяет неравенству $P_1(\mathrm{Pr}_\varphi, \tilde{b}) \le 2\varepsilon$.

Таким образом, ненадежность программы $N(\mathrm{Pr}_\varphi) \le 2\varepsilon$.

Лемма 1 доказана.

Из Леммы 1 следует, что для реализации функции $\varphi(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1x_2 \vee x_3x_4$ программой с условной остановкой достаточно лишь оператора конъюнкции $\&$, при этом ненадежность программы $N(\mathrm{Pr}_\varphi) \le 2\varepsilon$.

Используя лемму 1, докажем теорему 5.

Теорема 5. *В базисе B при* $\varepsilon \in (0, 1/960]$ *любую функцию* $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *можно реализовать такой программой* Pr_f *с абсолютно надежным оператором условной остановки, что* $N(\mathrm{Pr}_f) \le 2\varepsilon + 96\varepsilon^2 \le 2{,}1\varepsilon$.

Доказательство. Пусть $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ – произвольная булева функция. По теореме 1 ее можно реализовать схемой S с ненадежностью $P(S) \le 5\varepsilon + 182\varepsilon^2$. Обозначим $P_0(S, \tilde{a}), P_1(S, \tilde{a})$ вероятности ошибок схемы S. Используя схему S, построим для f неветвящуюся программу с оператором условной остановки Pr_f (рис. 2).

Pr_f :
1) $y_1 = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)[S]$
2) $y_2 = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)[S]$
3) $y_3 = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)[S]$
4) $y_4 = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)[S]$
5) $z = y_1 \,\&\, y_2$
6) $stop(z)$
7) $z = y_3 \,\&\, y_4$

Рис. 2

Вычислим и оценим вероятности ошибок на выходе программы Pr_f.

Пусть набор $\tilde{a}$ такой, что $f(\tilde{a}) = 0$, тогда

$$P_1(\mathrm{Pr}_f, \tilde{a}) = (1 - P_1(S, \tilde{a}))^4 (2\varepsilon - \varepsilon^2) + 4(1 - P_1(S, \tilde{a}))^3 P_1(S, \tilde{a})(2\varepsilon - \varepsilon^2) +$$

$$+(1 - P_1(S, \tilde{a}))^2 P_1^2(S, \tilde{a})(4(2\varepsilon - \varepsilon^2) + 2(1 - \varepsilon + \varepsilon^2)) +$$

$$+4(1 - P_1(S, \tilde{a}))P_1^3(S, \tilde{a})(1 - \varepsilon + \varepsilon^2) + P_1^4(S, \tilde{a})(1 - \varepsilon^2) \le 2\varepsilon + 8P(S)\varepsilon + 2P^2(S).$$

Поскольку $P(S) \le 5\varepsilon + 182\varepsilon^2$ и $\varepsilon \in (0, 1/960]$, получаем неравенство $P_1(\mathrm{Pr}_f, \tilde{a}) \le 2\varepsilon + 96\varepsilon^2 \le 2{,}1\varepsilon$.

Пусть набор $\tilde{a}$ такой, что $f(\tilde{a}) = 1$, тогда

$$P_0(\mathrm{Pr}_f, \tilde{a}) = (1 - P_0(S, \tilde{a}))^4 \varepsilon^2 + 4(1 - P_0(S, \tilde{a}))^3 P_0(S, \tilde{a})(\varepsilon - \varepsilon^2) +$$

$$+(1 - P_0(S, \tilde{a}))^2 P_0^2(S, \tilde{a})(2(\varepsilon - \varepsilon^2) + 4(1 - \varepsilon)^2) +$$

$$+4(1 - P_0(S, \tilde{a}))P_0^3(S, \tilde{a})(1 - \varepsilon)^2 + P_0^4(S, \tilde{a})(1 - \varepsilon)^2 \le \varepsilon^2 + 4P(S)\varepsilon + 4P^2(S).$$

Поскольку $P(S) \le 5\varepsilon + 182\varepsilon^2$ и $\varepsilon \in (0, 1/960]$, получаем неравенство $P_0(\mathrm{Pr}_f, \tilde{a}) \le 130\varepsilon^2$.

Выбирая из полученных для вероятностей ошибок значений максимальное, видим, что ненадежность программы $N(\mathrm{Pr}_f)$ удовлетворяет неравенству $N(\mathrm{Pr}_f) \le 2\varepsilon + 96\varepsilon^2 \le 2{,}1\varepsilon$.

Теорема 5 доказана.

Проведенные исследования показывают, что в базисах, содержащих конъюнкцию $x_1 \& x_2$, в том числе в $\{x_1 \& x_2, \overline{x_1}\}$ и $\{x_1 \& x_2, x_1 \vee x_2, \overline{x_1}\}$, при $\varepsilon \in (0, 1/960]$ все функции можно реализовать программами с абсолютно надежным оператором условной остановки, которые функционируют с ненадежностью, не больше $2\varepsilon + 96\varepsilon^2$, в то время как ненадежность асимптотически оптимальных схем, например в базисе $\{x_1 \& x_2, \overline{x_1}\}$, асимптотически равна 5ε при $\varepsilon \to 0$, в базисе $\{x_1 \& x_2, x_1 \vee x_2, \overline{x_1}\}$ – 3ε при $\varepsilon \to 0$.

2. Неветвящиеся программы с ненадежным оператором условной остановки

Будем предполагать, что оператор условной остановки ненадежен. Он может быть подвержен двум типам неисправностей: первый – на вход стоп-оператора поступает единица, но при этом он не прекращает работы программы; второй – на вход оператора условной остановки поступает ноль, и он срабатывает, прекращая работу программы. Обозначим η вероятность возникновения неисправности первого рода, т.е. вероятность того, что стоп-оператор не сработает при поступлении 1 на вход. Пусть δ – вероятность возникновения неисправности второго рода, а именно вероятность остановки при поступлении 0 на вход стоп-оператора. Считаем, что $\delta,\ \eta \in (0,\ 1/2)$.

Для неветвящихся программ с ненадежным оператором условной остановки справедливы следующие утверждения.

Лемма 2. *В базисе B при* $\varepsilon \in (0,\ 1/2)$ *программа* Pr_φ (рис. 1) *реализует функцию* $\varphi(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1 x_2 \vee x_3 x_4$ *с ненадежностью* $N(\mathrm{Pr}_\varphi) \le \varepsilon + \max\{\varepsilon, \delta, \eta\}$.

Доказательство. Вычислим и оценим вероятности P_0^{I}, P_1^{I}, P_0^{II}, P_1^{II} появления нуля и единицы на выходах подпрограмм программы Pr_φ при всех входных наборах $\tilde{b}$.

Пусть входной набор $\tilde{b}$ равен (1, 1, 1, 1), тогда

$$P_0^{\mathrm{I}} = \varepsilon\delta;$$
$$P_0^{\mathrm{II}} = [\varepsilon(1-\delta) + (1-\varepsilon)\eta]\varepsilon;$$
$$P_1^{\mathrm{I}} = (1-\varepsilon)(1-\eta);$$
$$P_1^{\mathrm{II}} = [(1-\varepsilon)\eta + \varepsilon(1-\delta)](1-\varepsilon).$$

Следовательно,

$$P_0(\mathrm{Pr}_\varphi, \tilde{b}) = P_0^{\mathrm{I}} + P_0^{\mathrm{II}} = \varepsilon^2 + \varepsilon\delta - \varepsilon^2\delta + \varepsilon\eta - \varepsilon^2\eta \le \varepsilon^2 + \varepsilon(\delta+\eta) \le \varepsilon + \varepsilon^2 \le 2\varepsilon;$$

$$P_1(\mathrm{Pr}_\varphi, \tilde{b}) = P_1^{\mathrm{I}} + P_1^{\mathrm{II}} = 1 - \varepsilon^2 - \varepsilon\delta - \varepsilon\eta + \varepsilon^2\delta + \varepsilon^2\eta.$$

Пусть входной набор $\tilde{b}$ равен одному из наборов (0, 1, 1, 1), (1, 0, 1, 1) или (0, 0, 1, 1), тогда

$$P_0^{\mathrm{I}} = (1-\varepsilon)\delta;$$
$$P_0^{\mathrm{II}} = [(1-\varepsilon)(1-\delta) + \varepsilon\eta]\varepsilon;$$
$$P_1^{\mathrm{I}} = \varepsilon(1-\eta);$$
$$P_1^{\mathrm{II}} = [\varepsilon\eta + (1-\varepsilon)(1-\delta)](1-\varepsilon).$$

Следовательно,

$$P_0(\mathrm{Pr}_\varphi, \tilde{b}) = P_0^{\mathrm{I}} + P_0^{\mathrm{II}} = \varepsilon + \delta - 2\varepsilon\delta - \varepsilon^2 + \varepsilon^2\delta + \varepsilon^2\eta =$$
$$= \varepsilon + \delta + \varepsilon^2(\eta - 1) + \varepsilon\delta(\varepsilon - 2) \le \varepsilon + \delta;$$
$$P_1(\mathrm{Pr}_\varphi, \tilde{b}) = P_1^{\mathrm{I}} + P_1^{\mathrm{II}} = 1 - \varepsilon - \delta + \varepsilon^2 + 2\varepsilon\delta - \varepsilon^2\delta - \varepsilon^2\eta.$$

Пусть входной набор $\tilde{b}$ равен одному из наборов (1, 1, 0, 1), (1, 1, 1, 0) или (1, 1, 0, 0), тогда

$$P_0^{\mathrm{I}} = \varepsilon\delta;$$
$$P_0^{\mathrm{II}} = [\varepsilon(1-\delta) + (1-\varepsilon)\eta](1-\varepsilon);$$
$$P_1^{\mathrm{I}} = (1-\varepsilon)(1-\eta);$$
$$P_1^{\mathrm{II}} = [(1-\varepsilon)\eta + \varepsilon(1-\delta)]\varepsilon.$$

Следовательно,

$$P_0(\mathrm{Pr}_\varphi, \tilde{b}) = P_0^{\mathrm{I}} + P_0^{\mathrm{II}} = \varepsilon + \eta - \varepsilon^2 - 2\varepsilon\eta + \varepsilon^2\delta + \varepsilon^2\eta =$$
$$= \varepsilon + \eta + \varepsilon^2(\delta - 1) + \varepsilon\eta(\varepsilon - 2) \le \varepsilon + \eta;$$
$$P_1(\mathrm{Pr}_\varphi, \tilde{b}) = P_1^{\mathrm{I}} + P_1^{\mathrm{II}} = 1 - \varepsilon - \eta + \varepsilon^2 + 2\varepsilon\eta - \varepsilon^2\delta - \varepsilon^2\eta.$$

Легко проверить, что на рассмотренных наборах ошибкой будет появление 0 на выходе программы. Максимальная вероятность ошибки удовлетворяет неравенству $P_0(\mathrm{Pr}_\varphi, \tilde{b}) \le \varepsilon + \max\{\delta, \eta\}$.

Пусть входной набор $\tilde{b}$ равен одному из наборов (0, 1, 0, 1), (0, 1, 1, 0), (1, 0, 0, 1), (1, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1), (0, 0, 1, 0), (1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0) или (0, 0, 0, 0), тогда

$$P_1^{\mathrm{I}} = \varepsilon(1-\eta);$$
$$P_1^{\mathrm{II}} = [\varepsilon\eta + (1-\varepsilon)(1-\delta)]\varepsilon;$$
$$P_0^{\mathrm{I}} = (1-\varepsilon)\delta;$$
$$P_0^{\mathrm{II}} = [(1-\varepsilon)(1-\delta) + \varepsilon\eta](1-\varepsilon).$$

Следовательно,

$$P_1(\mathrm{Pr}_\varphi, \tilde{b}) = P_1^{\mathrm{I}} + P_1^{\mathrm{II}} = 2\varepsilon - \varepsilon^2 - \varepsilon\delta - \varepsilon\eta + \varepsilon^2\delta + \varepsilon^2\eta =$$

$$= 2\varepsilon - \varepsilon^2 + \varepsilon\delta(\varepsilon - 1) + \varepsilon\eta(\varepsilon - 1) \le 2\varepsilon;$$

$$P_0(\mathrm{Pr}_\phi, \tilde{b}) = P_0^{\mathrm{I}} + P_0^{\mathrm{II}} = 1 - 2\varepsilon + \varepsilon^2 + \varepsilon\delta + \varepsilon\eta - \varepsilon^2\delta - \varepsilon^2\eta.$$

Заметим, что на рассмотренных наборах ошибкой будет появление 1 на выходе программы. Вероятность ошибки удовлетворяет неравенству $P_1(\mathrm{Pr}_\varphi, \tilde{b}) \le 2\varepsilon$.

Таким образом, ненадежность программы $N(\mathrm{Pr}_\varphi) \le \varepsilon + \max\{\varepsilon, \delta, \eta\}$.

Лемма 2 доказана.

Используя лемму 2, докажем теорему 6.

Теорема 6. *В базисе B при* $\varepsilon \in (0, 1/960]$ *любую функцию* $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *можно реализовать такой программой* Pr_f (рис. 2) *с ненадежным оператором условной остановки, что* $N(\mathrm{Pr}_f) \le \max\{2\varepsilon + 96\varepsilon^2, 130\varepsilon^2 + 11{,}4\varepsilon(\delta + \eta)\}$.

Доказательство. Докажем теорему 6 аналогично теореме 5.

Вычислим и оценим вероятности ошибок на выходе программы Pr_f (рис. 2).

Пусть набор $\tilde{a}$ такой, что $f(\tilde{a}) = 0$. Тогда

$$P_1(\mathrm{Pr}_f, \tilde{a}) = (1 - P_1(S, \tilde{a}))^4 (2\varepsilon - \varepsilon^2 + \varepsilon\delta(\varepsilon - 1) + \varepsilon\eta(\varepsilon - 1)) +$$

$$+4(1 - P_1(S, \tilde{a}))^3 P_1(S, \tilde{a})(2\varepsilon - \varepsilon^2 + \varepsilon\delta(\varepsilon - 1) + \varepsilon\eta(\varepsilon - 1)) +$$

$$+(1 - P_1(S, \tilde{a}))^2 P_1^2(S, \tilde{a})(4(2\varepsilon - \varepsilon^2 + \varepsilon\delta(\varepsilon - 1) + \varepsilon\eta(\varepsilon - 1)) +$$

$$+2(1 - \varepsilon - \delta + \varepsilon^2 + 2\varepsilon\delta - \varepsilon^2\delta - \varepsilon^2\eta)) +$$

$$+(1 - P_1(S, \tilde{a}))P_1^3(S, \tilde{a})(2(1 - \varepsilon - \delta + \varepsilon^2 + 2\varepsilon\delta - \varepsilon^2\delta - \varepsilon^2\eta) +$$

$$+2(1 - \varepsilon - \eta + \varepsilon^2 + 2\varepsilon\eta - \varepsilon^2\delta - \varepsilon^2\eta)) + P_1^4(S, \tilde{a})(1 - \varepsilon - \delta + \varepsilon^2 + 2\varepsilon\delta - \varepsilon^2\delta - \varepsilon^2\eta) \le$$

$$\le 2\varepsilon + 8P(S)\varepsilon + 2P^2(S).$$

Поскольку $P(S) \le 5\varepsilon + 182\varepsilon^2$ и $\varepsilon \in (0, 1/960]$, получаем неравенство $P_1(\mathrm{Pr}_f, \tilde{a}) \le 2\varepsilon + 96\varepsilon^2 \le 2{,}1\varepsilon$.

Пусть набор $\tilde{a}$ такой, что $f(\tilde{a}) = 1$. Тогда

$$P_0(\mathrm{Pr}_f, \tilde{a}) = (1 - P_0(S, \tilde{a}))^4 (\varepsilon^2 + \varepsilon\delta - \varepsilon^2\delta + \varepsilon\eta - \varepsilon^2\eta) +$$

$$+(1 - P_0(S, \tilde{a}))^3 P_0(S, \tilde{a})(2(\varepsilon + \delta + \varepsilon^2(\eta - 1) + \varepsilon\delta(\varepsilon - 2)) +$$

$$+2(\varepsilon + \eta + \varepsilon^2(\delta - 1) + \varepsilon\eta(\varepsilon - 2))) +$$

$$+(1-P_0(S,\tilde{a}))^2 P_0^2(S,\tilde{a})((\varepsilon+\delta+\varepsilon^2(\eta-1)+\varepsilon\delta(\varepsilon-2))+$$

$$+(\varepsilon+\eta+\varepsilon^2(\delta-1)+\varepsilon\eta(\varepsilon-2))+4(1-2\varepsilon+\varepsilon^2+\varepsilon\delta+\varepsilon\eta-\varepsilon^2\delta-\varepsilon^2\eta))+$$

$$+4(1-P_0(S,\tilde{a}))P_0^3(S,\tilde{a})(1-2\varepsilon+\varepsilon^2+\varepsilon\delta+\varepsilon\eta-\varepsilon^2\delta-\varepsilon^2\eta)+$$

$$+P_0^4(S,\tilde{a})(1-2\varepsilon+\varepsilon^2+\varepsilon\delta+\varepsilon\eta-\varepsilon^2\delta-\varepsilon^2\eta)\le$$

$$\le\varepsilon^2+\varepsilon(\delta+\eta)+2P(S)(2\varepsilon+\delta+\eta)+4P^2(S).$$

Поскольку $P(S)\le 5\varepsilon+182\varepsilon^2$, $\varepsilon\in(0,1/960]$, получаем неравенство $P_0(\mathrm{Pr}_f,\tilde{a})\le 130\varepsilon^2+11,4\varepsilon(\delta+\eta)$.

Таким образом, ненадежность программы $N(\mathrm{Pr}_f)$ удовлетворяет неравенству $N(\mathrm{Pr}_f)\le\max\{2\varepsilon+96\varepsilon^2, 130\varepsilon^2+11,4\varepsilon(\delta+\eta)\}$.

Теорема 6 доказана.

Следствие 1. *Если* $\varepsilon\in(0,1/960]$ *и* $\delta+\eta\le 0,16$, *то любую функцию* $f(x_1,x_2,...,x_n)$ *можно реализовать такой программой* Pr_f (рис. 2) *с ненадежным оператором условной остановки, что* $N(\mathrm{Pr}_f)\le 2\varepsilon+96\varepsilon^2$.

Доказательство. Из теоремы 6 известно, что $N(\mathrm{Pr}_f)\le\max\{2\varepsilon+96\varepsilon^2, 130\varepsilon^2+11,4\varepsilon(\delta+\eta)\}$.

Поскольку $\varepsilon\in(0,1/960]$ и $\delta+\eta\le 0,16$, получаем

$$130\varepsilon^2+11,4\varepsilon(\delta+\eta)\le 0,135\varepsilon+11,4\varepsilon\cdot 0,16\le 2\varepsilon\le 2\varepsilon+96\varepsilon^2.$$

Таким образом,

$$\max\{2\varepsilon+96\varepsilon^2, 130\varepsilon^2+11,4\varepsilon(\delta+\eta)\}=2\varepsilon+96\varepsilon^2.$$

Следствие 1 доказано.

Проведенные исследования показывают, что в базисах, содержащих конъюнкцию $x_1\,\&\,x_2$ при $\varepsilon\in(0,1/960]$, любую функцию f можно реализовать такой программой с ненадежным оператором условной остановки, что $N(\mathrm{Pr}_f)\le\max\{2\varepsilon+96\varepsilon^2, 130\varepsilon^2+11,4\varepsilon(\delta+\eta)\}$. В частности, если $\delta+\eta\le 0,16$ или $\delta=\eta=\varepsilon$, то $N(\mathrm{Pr}_f)\le 2\varepsilon+96\varepsilon^2$. Ненадежность асимптотически оптимальных схем, например в базисе $\{x_1\,\&\,x_2, \bar{x}_1\}$, асимптотически равна 5ε при $\varepsilon\to 0$.

Список литературы

1. **Чашкин, А. В.** О среднем времени вычисления значений булевых функций / А. В. Чашкин // Дискретный анализ и исследование операций. – 1997. – Январь–март. – Т. 4. – № 1. – С. 60–78.
2. **Алехина, М. А.** О надежности схем в базисах, содержащих функции не более чем трех переменных / М. А. Алехина, А. В. Васин // Ученые записки Казанского гос. ун-та. – 2009. – Т. 151. – Кн. 2. – С. 25–35. – (Физико-математические науки).

3. **Васин, А. В.** Об асимптотически оптимальных схемах в базисе $\{x_1 \& x_2, \bar{x}_1\}$ / А. В. Васин // Дискретный анализ и исследование операций. – Новосибирск : Изд-во института математики. – 2009. – Т. 16. – № 6. – С. 12–22.
4. **Васин, А. В.** Об асимптотически оптимальных схемах в базисе $\{x_1 \& x_2, x_1 \vee x_2, \bar{x}_1\}$ при инверсных неисправностях на выходах элементов / А. В. Васин // Материалы седьмой международной молодежной школы по дискретной математике и ее приложениям (г. Москва, 18–23 мая 2009 г.). – М. : Изд-во мех.-мат. фак-та МГУ им. М. В. Ломоносова, 2009. – Ч. 1. – С. 15–19.

Грабовская Светлана Михайловна
ассистент, кафедра дискретной математики, Пензенский государственный университет

E-mail: swetazin@mail.ru

Grabovskaya Svetlana Mikhaylovna
Assistant, sub-department of discrete mathematics, Penza State University

УДК 519.718

Грабовская, С. М.

Синтез надежных неветвящихся программ с условной остановкой в полном конечном базисе, содержащем $x_1 \& x_2$ / С. М. Грабовская // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2010. – № 3 (15). – С. 43–54.